

Transformación de Darboux: herramienta para diseñar espectros en mecánica cuántica

David J. Fernández C.
Depto. de Física, CINVESTAV-IPN
A.P. 14-740, 07000 México D.F.

Se hace una presentación elemental de la transformación de Darboux en mecánica cuántica no-relativista. Tal transformación representa la técnica matemática más sencilla para diseñar (manipular) cierto tipo de espectros cuánticos dentro de la así llamada *ingeniería espectral*.

1. Introducción.

Los potenciales exactamente solubles, que poseen expresiones explícitas para los eigenvalores y la base de eigenvectores del Hamiltoniano, han proporcionado modelos muy útiles en situaciones físicas diversas. Lo anterior ha justificado la búsqueda recurrente de ese tipo de potenciales. En esa dirección el acercamiento estandar, en donde dado el Hamiltoniano uno busca el espectro correspondiente, parece en esencia agotado. La alternativa natural consiste en tratar de encontrar potenciales solubles mediante el acercamiento inverso en donde se busca el (los) Hamiltoniano (s) que tienen un espectro dado; esta idea será llamada *diseño espectral*. Un modo de abordar este problema consiste en generar mediante técnicas sencillas potenciales solubles que tengan parámetros relacionados con el espectro. Si al variar dichos parámetros no destruimos la naturaleza soluble del potencial, estaremos manipulando ingeniosamente el espectro, lo que nos proveerá de una herramienta poderosa en lo que podría llamarse también *ingeniería espectral*.

La técnica no trivial más simple para diseñar espectros cuánticos es conocida como transformación de Darboux, la cual mapea soluciones de una ecuación diferencial de segundo orden en las de otra ecuación diferencial cuya forma es similar a la inicial. La implementación de tal transformación está contenido en el siguiente teorema.

Teorema. Consideremos la ecuación tipo Sturm-Liouville

$$-\Psi'' + u_0(x)\Psi = \lambda\Psi. \quad (1)$$

Sean Ψ_{λ_1} y Ψ soluciones de (1) para $\lambda = \lambda_1$ fija y $\lambda \neq \lambda_1$ arbitraria respectivamente. Por tanto, $\Psi^{(1)} = (-\frac{d}{dx} + \frac{\Psi'_{\lambda_1}}{\Psi_{\lambda_1}})\Psi = W(\Psi, \Psi_{\lambda_1})/\Psi_{\lambda_1}$ con $W(\Psi, \Psi_{\lambda_1}) = \Psi\Psi'_{\lambda_1} - \Psi'\Psi_{\lambda_1}$ es solución de la ecuación diferencial

$$-\Psi^{(1)''} + u_1(x)\Psi^{(1)} = \lambda\Psi^{(1)} \quad (2)$$

en donde $u_1(x) = u_0(x) - 2[\ln \Psi_{\lambda_1}]''$.

2. Entrelazamiento de primer orden.

Trabajos recientes muestran que la transformación de Darboux es equivalente al entrelazamiento de primer orden. En este método uno supone que tres operadores H_0 ,

H_1 y A_1^\dagger satisfacen la siguiente relación de entrelazamiento (intercambio) operatorial:

$$H_1 A_1^\dagger = A_1^\dagger H_0, \quad (3)$$

$$H_i = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_i(x), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$A_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{d}{dx} + \alpha_1(x) \right]. \quad (5)$$

Usando la identidad operatorial $\frac{d}{dx} f(x) = f(x) \frac{d}{dx} + f'(x)$, en cada sumando de (3) se puede mover $\frac{d}{dx}$ a la derecha e igualar los coeficientes de sus potencias iguales a ambos lados de la ecuación resultante, lo cual conduce a:

$$-\frac{1}{2} \alpha_1''(x) + V_1(x) \alpha_1(x) = -V_0'(x) + \alpha_1(x) V_0(x), \quad (6)$$

$$V_1(x) = V_0(x) - \alpha_1'(x). \quad (7)$$

Sustituyendo $V_1(x)$ de (7) en (6) e integrando se obtiene la ecuación de Riccati siguiente:

$$\alpha_1'(x, \epsilon) + \alpha_1^2(x, \epsilon) = 2[V_0(x) - \epsilon]. \quad (8)$$

La constante ϵ es conocida como *energía de factorización* ya que:

$$H_0 = A_1 A_1^\dagger + \epsilon, \quad H_1 = A_1^\dagger A_1 + \epsilon. \quad (9)$$

Su valor es crucial para generar potenciales solubles, como es claro de suponer que $\alpha_1(x, \epsilon) = [\ln \psi_\epsilon^{(0)}(x)]' \Rightarrow \psi_\epsilon^{(0)}(x) \propto \exp(\int_0^x \alpha_1(y, \epsilon) dy)$, lo cual conduce a:

$$H_0 \psi_\epsilon^{(0)}(x) = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi_\epsilon^{(0)}(x)}{dx^2} + V_0(x) \psi_\epsilon^{(0)}(x) = \epsilon \psi_\epsilon^{(0)}(x). \quad (10)$$

Notemos que:

- A diferencia de las eigenfunciones de H_0 , $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ no necesita ser normalizable.
- No obstante, $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ no debe tener ceros para evitar singularidades en $V_1(x)$.

En torno a los ceros de $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$, se sabe que cuando $\epsilon > E_0$, donde E_0 es la energía del estado base de H_0 , las funciones $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ siempre tendrán ceros. Esto las excluye en principio como candidatos para generar potenciales apropiados (sin singularidades adicionales a las de $V_0(x)$). Sin embargo, cuando $\epsilon \leq E_0$ es posible que la solución $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ a (10) no tenga ceros (mediante el ajuste del par de constantes arbitrarias de la solución general correspondiente). Además, un manejo adecuado de las soluciones con ceros (para ambos casos $\epsilon \leq E_0$ y $\epsilon > E_0$) puede conducir a potenciales apropiados cuando se itera la técnica de entrelazamiento (3).

Por simplicidad supondremos desde ahora que $\epsilon \leq E_0$ y que hemos seleccionado soluciones $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ a (10) sin ceros en \mathbf{R} . De la relación de entrelazamiento (3) y las factorizaciones en (9) se pueden encontrar las eigenfunciones y eigenvalores de H_1 . Denotemos E_n y $\psi_n^{(0)}(x)$, $n = 0, 1, \dots$ los eigenvalores y eigenfunciones normalizadas de H_0 .

Por tanto, $\psi_n^{(1)}(x) = A_1^\dagger \psi_n^{(0)}(x) / \sqrt{E_n - \epsilon}$, $n = 0, 1, \dots$ son eigenfunciones normalizadas de H_1 con eigenvalores E_n . Como $\{\psi_n^{(0)}(x), n = 0, 1, \dots\}$ es base en $L^2(\mathbf{R})$, surge la pregunta de si $\{\psi_n^{(1)}(x), n = 0, 1, \dots\}$ es también base en $L^2(\mathbf{R})$. Para responderlo, busquemos funciones normalizables $\psi_\epsilon^{(1)}(x)$ ortogonales a cualesquiera de los $\psi_n^{(1)}(x)$, es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= (\psi_\epsilon^{(1)}, \psi_n^{(1)}) \propto (\psi_\epsilon^{(1)}, A_1^\dagger \psi_n^{(0)}) = (A_1 \psi_\epsilon^{(1)}, \psi_n^{(0)}) \\ &\Rightarrow A_1 \psi_\epsilon^{(1)} = 0 \Rightarrow \psi_\epsilon^{(1)}(x) \propto \exp(-\int_0^x \alpha_1(y, \epsilon) dy) \propto 1/\psi_\epsilon^{(0)}(x). \end{aligned}$$

Por tanto, si $\psi_\epsilon^{(1)}(x) \propto 1/\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ es normalizable, se debe anexar al conjunto $\{\psi_n^{(1)}(x), n = 0, 1, \dots\}$ para formar una nueva base de $L^2(\mathbf{R})$. Notemos además que de (9):

$$H_1 \psi_\epsilon^{(1)}(x) = \epsilon \psi_\epsilon^{(1)}(x). \quad (11)$$

Así, las principales conclusiones de esta sección son:

- Si $\psi_\epsilon^{(1)}(x) \propto 1/\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ es normalizable, el conjunto $\{\psi_\epsilon^{(1)}(x), \psi_n^{(1)}(x), n = 0, 1, \dots\}$ es un conjunto completo de eigenfunciones de H_1 con eigenvalores $\{\epsilon, E_n\}$, es decir, es una nueva base de $L^2(\mathbf{R})$.
- Partiendo de un potencial exactamente soluble, lo que hay que resolver a fin de cuentas es la ecuación de Riccati (8) o su contraparte de segundo orden (10) para algún (o un continuo de) valor (es) $\epsilon \leq E_0$.

Notemos que el diseño espectral requiere de mayor libertad para modificar espectros cuánticos que la conseguida hasta ahora con el entrelazamiento de primer orden. Como veremos a continuación, un avance en esta dirección se puede conseguir mediante iteraciones del entrelazamiento de primer orden.

3. Entrelazamiento de orden superior.

El entrelazamiento de orden superior, en el que el operador que entrelaza a un Hamiltoniano inicial conocido con un Hamiltoniano final mediante un operador diferencial de orden mayor que 1, se puede lograr iterando el entrelazamiento de primer orden de la sección previa. Así, denotemos $H_i, i = 1, 2, \dots$ a los Hamiltonianos generados a partir de H_0 , y A_i^\dagger a los operadores que entrelazan al par H_i, H_{i-1} en el i -ésimo paso:

$$H_i A_i^\dagger = A_i^\dagger H_{i-1}, \quad (12)$$

$$H_i = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_i(x), \quad (13)$$

$$A_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dx} + \alpha_i(x, \epsilon_i) \right). \quad (14)$$

De acuerdo a la sección previa, $\alpha_i(x, \epsilon_i)$ debe satisfacer la ecuación de Riccati:

$$\alpha_i'(x, \epsilon_i) + \alpha_i^2(x, \epsilon_i) = 2[V_{i-1}(x) - \epsilon_i]. \quad (15)$$

El potencial $V_i(x)$ se determina al conocer $V_{i-1}(x)$ y la solución de (15):

$$V_i(x) = V_{i-1}(x) - \alpha_i'(x, \epsilon_i). \quad (16)$$

Un resultado crucial es que tal solución se determina algebraicamente mediante las dos soluciones de la ecuación correspondiente al $(i-1)$ -ésimo paso asociadas a las dos energías de factorización $\epsilon_{i-1}, \epsilon_i$:

$$\alpha_i(x, \epsilon_i) = -\alpha_{i-1}(x, \epsilon_{i-1}) - 2 \frac{(\epsilon_{i-1} - \epsilon_i)}{\alpha_{i-1}(x, \epsilon_{i-1}) - \alpha_{i-1}(x, \epsilon_i)}. \quad (17)$$

Al aplicar recursivamente esta fórmula llegamos a las siguientes conclusiones:

- $\alpha_i(x, \epsilon_i)$ se obtiene de las i soluciones $\alpha_1(x, \epsilon_k)$, $k = 1, \dots, i$ de la ecuación inicial:

$$\alpha_1'(x, \epsilon_k) + \alpha_1^2(x, \epsilon_k) = 2[V_0(x) - \epsilon_k]. \quad (18)$$

- El espectro de los potenciales $V_i(x)$ consiste de los niveles E_n , $n = 0, 1, \dots$ de $V_0(x)$ mas i niveles adicionales ϵ_k , $k = 1, \dots, i$ colocados por simplicidad debajo de E_0 .
- El operador ‘efectivo’ que entrelaza a H_0 y H_i viene dado por $A^\dagger = A_i^\dagger \dots A_1^\dagger$.

Notemos que el potencial después de dos iteraciones adquiere la forma simple:

$$V_2(x) = V_1(x) - \alpha_2'(x, \epsilon_2) = V_0(x) + \left[\frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\alpha_1(x, \epsilon_1) - \alpha_1(x, \epsilon_2)} \right]'. \quad (19)$$

Ilustremos ahora estos resultados generales mediante el caso disponible más simple.

4. Partícula libre.

Sea una partícula libre de fuerzas, es decir, tomemos $V_0(x) = 0$. El espectro de este potencial consiste del semieje positivo $E \geq 0$. Resolvamos ahora la ecuación de Riccati (8) o su contraparte de segundo orden (10):

$$\frac{d^2 \psi_\epsilon^{(0)}(x)}{dx^2} + 2\epsilon \psi_\epsilon^{(0)}(x) = 0. \quad (20)$$

De acuerdo al tipo de solución general, distinguiamos tres casos físicamente diferentes.

i) Energía de factorización positiva ($\epsilon > 0$). La solución general a (20) es de la forma:

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \mu \sin \sqrt{2\epsilon} x + \nu \cos \sqrt{2\epsilon} x. \quad (21)$$

En cuanto al entrelazamiento de primer orden, $V_1(x) = -[\ln \psi_\epsilon^{(0)}(x)]''$ no debe tener singularidades en \mathbf{R} por lo que μ y ν deben ajustarse para que $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ no tenga ceros. Ya que $\epsilon > 0$, $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ siempre tendrá ceros (tan $\sqrt{2\epsilon} x = -\nu/\mu$ tendrá soluciones sin importar los valores de μ y ν). Debido a ésto, la solución (21) queda excluida.

ii) Energía de factorización nula ($\epsilon = 0$). La solución general a (20) es ahora:

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \mu x + \nu. \quad (22)$$

Ya que $\psi_\epsilon^{(0)}(-\nu/\mu) = 0$, $\mu \neq 0$, esta solución queda también excluida porque o induce singularidades en $V_1(x)$ para $\mu \neq 0$ o conduce nuevamente al potencial inicial $V_1(x) = 0$ para $\mu = 0$.

iii) Energía de factorización negativa ($\epsilon < 0$). La solución general a (20) es:

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \mu e^{\sqrt{-2\epsilon}x} + \nu e^{-\sqrt{-2\epsilon}x}. \quad (23)$$

Como $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ no debe tener ceros, pidamos que $\psi_\epsilon^{(0)}(x) > 0$ para $x \in \mathbf{R}$. Ya que la función clave es $\alpha_1(x, \epsilon) = [\ln \psi_\epsilon^{(0)}(x)]'$, el parámetro importante es ν/μ o su inverso, por lo que haremos $\mu = 1$. Asintóticamente, cuando $x \rightarrow -\infty$ tenemos que $\psi_\epsilon^{(0)}(x) \approx \nu \exp(-\sqrt{-2\epsilon}x) \Rightarrow \nu > 0$. Por otro lado, $\psi_\epsilon^{(0)}(x) \approx \exp(\sqrt{-2\epsilon}x)$ cuando $x \rightarrow \infty$, lo cual es siempre positivo. Podemos por tanto hacer $\nu = e^{2\sqrt{-2\epsilon}x_0}$ y al despreciar una constante multiplicativa en (23) que no afecta los resultados físicos obtenemos la fórmula alternativa:

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \cosh \left[\sqrt{-2\epsilon}(x - x_0) \right]. \quad (24)$$

Esta solución garantiza que $V_1(x)$ no tiene singularidades:

$$V_1(x) = - \left[\ln \psi_\epsilon^{(0)}(x) \right]'' = 2\epsilon \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{-2\epsilon}(x - x_0) \right]. \quad (25)$$

Este es el potencial de Pöschl-Teller con un estado ligado de energía ϵ y función de onda:

$$\psi_\epsilon^{(1)}(x) \propto 1/\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \operatorname{sech} \left[\sqrt{-2\epsilon}(x - x_0) \right]. \quad (26)$$

Notar que $V_1(x)$ tiene dos parámetros libres (x_0 y ϵ); para el diseño espectral importa principalmente ϵ ya que cambios en éste modifican el espectro de $V_1(x)$ mientras que los cambios de x_0 no afectan el espectro. Un ejemplo simple de ingeniería espectral se ilustra en la figura 1 mediante una gráfica de $V_1(x)$ para diversos valores de ϵ y x con $x_0 = 0$.

La solución con ceros resultante de considerar (23) con $\mu = 1, \nu < 0$, si se toma $\nu = -e^{2\sqrt{-2\epsilon}x_1}$ y se desprecia nuevamente un factor constante se expresa como:

$$\psi_\epsilon^{(0)}(x) = \sinh \left[\sqrt{-2\epsilon}(x - x_1) \right]. \quad (27)$$

Como ahora veremos, esta solución viene a ser importante para el entrelazamiento de orden superior. Consideremos dos iteraciones del caso de primer orden y restrinjámonos a $\epsilon < 0$. En términos de dos soluciones a (20) el potencial $V_2(x)$ viene a ser:

$$V_2(x) = \left[\frac{2(\epsilon_2 - \epsilon_1)\psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x)\psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x)}{W_{12}} \right]'. \quad (28)$$

Para evitar singularidades en $V_2(x)$, el Wronskiano de $\psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x)$ y $\psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x)$ es ahora quien no debe tener ceros:

$$W_{12} \equiv \psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x)[\psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x)]' - \psi_{\epsilon_2}^{(0)}(x)[\psi_{\epsilon_1}^{(0)}(x)]' = d(e^{sx} - \nu_1\nu_2e^{-sx}) + s(\nu_1e^{dx} - \nu_2e^{-dx}), \quad (29)$$

en donde hemos usado aún la expresión (23) para $\psi_\epsilon^{(0)}(x)$ con $\mu_1 = \mu_2 = 1$ y $s = \sqrt{-2\epsilon_1} + \sqrt{-2\epsilon_2}$, $d = \sqrt{-2\epsilon_2} - \sqrt{-2\epsilon_1}$. Pidamos que $W_{12} > 0$ y supongamos que $\epsilon_2 < \epsilon_1 < 0 \Rightarrow s > 0, d > 0$. Asintóticamente, cuando $x \rightarrow \infty$ resulta que $W_{12} \approx (de^{sx} + s\nu_1 e^{dx}) \Rightarrow \nu_1 > 0$. Por otro lado, cuando $x \rightarrow -\infty$ tenemos que $W_{12} \approx -\nu_2(d\nu_1 e^{-sx} + se^{-dx}) \Rightarrow \nu_2 < 0$. En resumen, si $\epsilon_2 < \epsilon_1 < 0$, para evitar singularidades en $V_2(x)$ se debe cumplir que $\nu_1 > 0$ y $\nu_2 < 0$, es decir, se debe emplear una solución $\psi_{\epsilon_1}^{(0)}$ sin ceros y una $\psi_{\epsilon_2}^{(0)}$ con ceros. Usando (24) y (27) para $\psi_{\epsilon_1}^{(0)}$ y $\psi_{\epsilon_2}^{(0)}$ respectivamente llegamos a una expresión compacta para $V_2(x)$:

$$V_2(x) = \frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)[\epsilon_1 \operatorname{sech}^2 \sqrt{-2\epsilon_1}(x - x_0) + \epsilon_2 \operatorname{csch}^2 \sqrt{-2\epsilon_2}(x - x_1)]}{[\sqrt{-\epsilon_1} \tanh \sqrt{-2\epsilon_1}(x - x_0) - \sqrt{-\epsilon_2} \coth \sqrt{-2\epsilon_2}(x - x_1)]^2}. \quad (30)$$

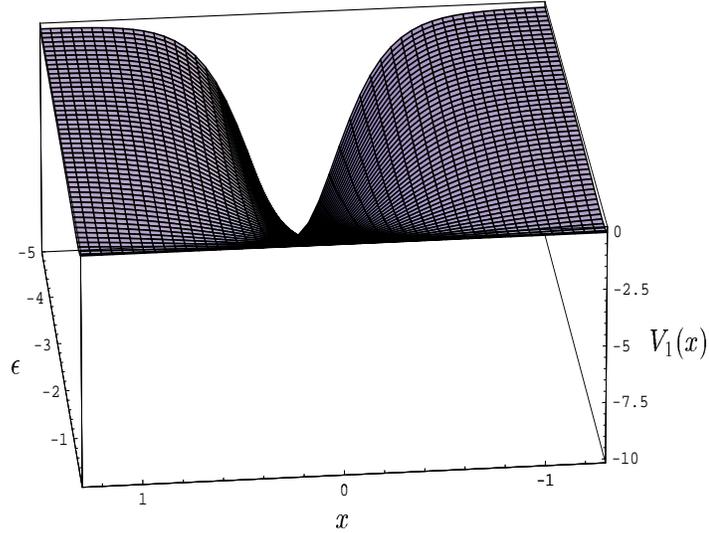


Fig.1: Ingeniería espectral resultante de manipular la posición del estado base de $V_1(x)$ con $x_0 = 0$ sin destruir la solubilidad del potencial .

Este potencial tiene cuatro parámetros libres, las posiciones x_0 y x_1 de los centros de las dos ψ 's que son poco importantes para la ingeniería espectral y los dos nuevos niveles $\epsilon_2 < \epsilon_1 < 0$ que son muy importantes desde esa perspectiva. Un ejemplo de ingeniería espectral se ilustra en la figura 2 mediante una gráfica de $V_2(x)$ como función de x y ϵ_2 para $\epsilon_1 = -1/2$ y $x_0 = x_1 = 0$. Notar la simetría respecto a $x = 0$, es decir, $V_2(-x) = V_2(x)$. Un caso no simétrico se ilustra en la figura 3 para $\epsilon_1 = -1/2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y el nivel ϵ_2 del estado base variable.

Notemos que en los ejemplos de las figuras (1-3) el mecanismo físico es el mismo: mover controladamente el nivel del estado base del potencial en turno para no destruir su solubilidad. Un mecanismo físico diferente lo proporciona $V_2(x)$: ya que ϵ_1 puede tomar valores continuos, mantengamos fijo el estado base ϵ_2 de $V_2(x)$ y movamos el nivel ϵ_1 del primer estado excitado respetando que $\epsilon_2 < \epsilon_1 < 0$. Este tipo de ingeniería espectral se ilustra en la figura 4 (caso simétrico) para $\epsilon_2 = -2$ y $x_0 = x_1 = 0$.

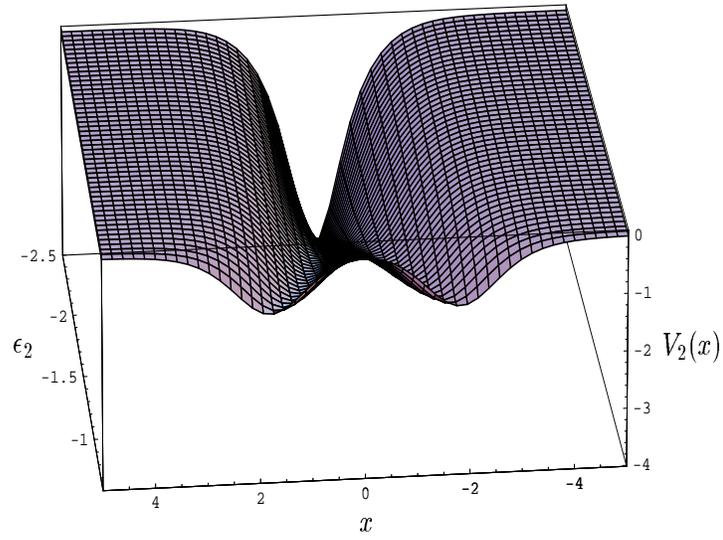


Fig.2: Ingeniería espectral sobre $V_2(x)$ (caso simétrico) con $\epsilon_1 = -1/2$ y $x_0 = x_1 = 0$ en donde el nivel del estado base ϵ_2 se mueve sin destruir la solubilidad de $V_2(x)$.

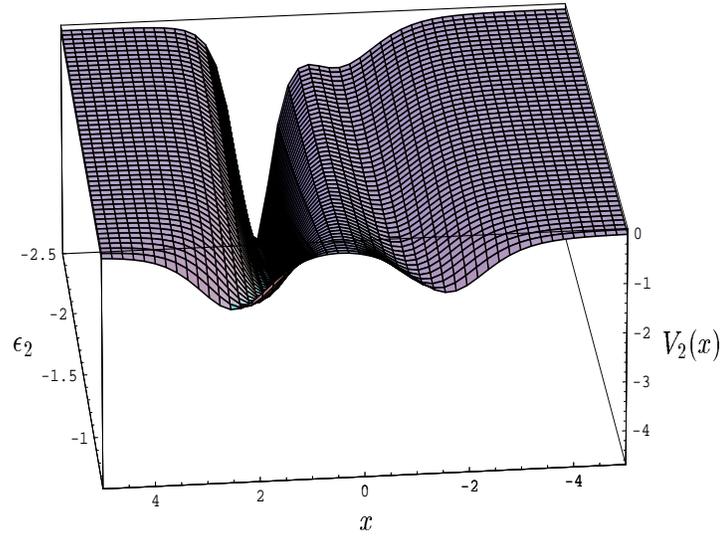


Fig.3: Ingeniería espectral sobre $V_2(x)$ similar al de la figura 2 para el caso asimétrico resultante de tomar $\epsilon_1 = -1/2$, $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$.

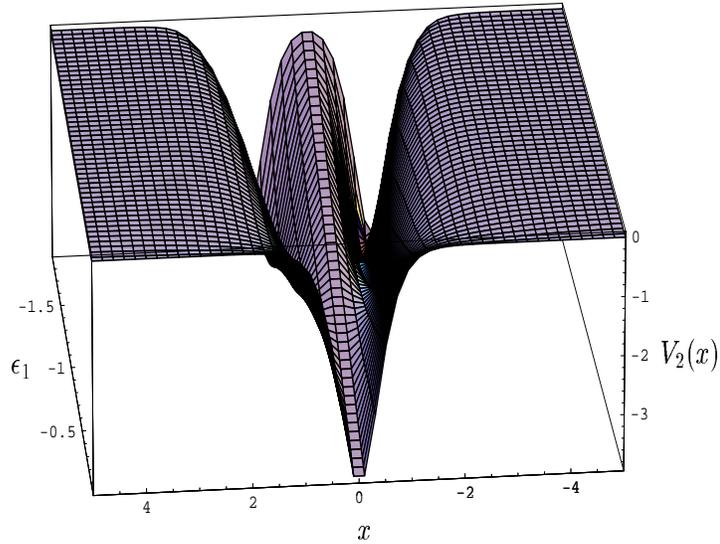


Fig.4: Ingeniería espectral sobre $V_2(x)$ (caso simétrico) con $\epsilon_2 = -2$ y $x_0 = x_1 = 0$ en donde el nivel del primer estado excitado se mueve sin destruir la solubilidad de $V_2(x)$.

5. Conclusiones.

Hemos visto que el entrelazamiento de primer orden proporciona una herramienta poderosa para la ingeniería (diseño) de espectros en mecánica cuántica no-relativista. Esta transformación es útil tanto si se aplica directamente, para generar potenciales solubles cuyos espectros poseen un nivel adicional a los del potencial inicial, como si se itera para generar potenciales solubles que tienen un número finito de nuevos niveles adicionales a los del potencial inicial. Es importante notar que las posibilidades de manipulación espectral pueden incrementarse si se combinan cierto tipo de transformaciones unitarias, que por sí solas no producen modificaciones a los espectros, con las técnicas de entrelazamiento discutidas en este trabajo (ver el trabajo reciente de Fernández y Rosu).

Agradecimientos

El autor agradece el apoyo del CONACYT (proyecto 32086-E) y a los doctores Luis Miguel Nieto y Oscar Rosas las discusiones estimulantes en torno a este trabajo.

Referencias

1. Método de factorización: E. Schrödinger, Proc. R. Irish Acad. A **46**, 183 (1940); L. Infeld, T.E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23**, 21 (1951); B. Mielnik, J. Math. Phys. **25**, 3387 (1984); D.J. Fernández, Lett. Math. Phys. **8**, 337 (1984).
2. Técnica de entrelazamiento: D.J. Fernández, Int. J. Mod. Phys. A **12**, 171 (1997); D.J. Fernández, M.L. Glasser, L.M. Nieto, Phys. Lett. A **240**, 15 (1998); B. Mielnik, L.M. Nieto, O. Rosas-Ortiz, *The finite difference algorithm for higher order supersymmetry*,

- preprint Universidad de Valladolid (1998); D.J. Fernández, V. Hussin, B. Mielnik, Phys. Lett. A **244**, 309 (1998).
3. Mecánica cuántica supersimétrica: E. Witten, Nucl. Phys. B **188**, 513 (1981); M.M. Nieto, Phys. Lett. B **145**, 208 (1984); A.A. Andrianov, M.V. Ioffe, V. Spiridonov, Phys. Lett. A **174**, 273 (1993); A.A. Andrianov, M.V. Ioffe, F. Cannata, J.P. Dondond, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 2683 (1995); F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
 4. Transformación de Darboux: A.A. Andrianov, N.V. Borisov, M.V. Ioffe, Phys. Lett. A **105**, 19 (1984); A. Shabat, Inv. Prob. **8** 303 (1992); V.G. Bagrov, B.F. Samsonov, Theor. Math. Phys. **104**, 1051 (1995); V.G. Bagrov, B.F. Samsonov, Phys. Part. Nucl. **28**, 374 (1997).
 5. Aplicaciones: C.V. Sukumar, J. Phys. A **18**, 2917 (1985); S.Y. Dubov, V.M. Eleonsky, N.E. Kulagin, Sov. Phys. JETP **75**, 446 (1992); D.J. Fernández, J. Negro, M.A. del Olmo, Ann. Phys. **252**, 386 (1996); I.F. Márquez, J. Negro, L.M. Nieto, J. Phys. A **31**, 4115 (1998); G. Junker, P. Roy, Ann. Phys. **270**, 155 (1998); J. Oscar Rosas-Ortiz, J. Phys. A **31**, L507 (1998); **31**, 10163 (1998); D.J. Fernández, V. Hussin, J. Phys. A **32**, 3603 (1999).
 6. Ingeniería espectral: B.N. Zakhariev, V.M. Chabanov, Inv. Prob. **13**, R47 (1997); D.J. Fernández, H.C. Rosu, preprint quant-ph/9910125.