Caos y sistemas dinámicos

Memorias de coloquios

(Compiladores)

Guillermo Gómez Alcaraz
Santiago López de Medrano
José Rubén Luévano
Carlos A. Vargas

1a. edición, 1994

Departamento de Ciencias Básicas

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Unidad Azcapotzalco

Casa abierta al tiempo

ELECTRON ATRAPADO EN UN CAMPO MAGNETICO ROTANTE.

David J. Fernández C.
Depto. de Física, CINVESTAV IPN,
Apdo. Postal 14-740, México 14, D.F.

Es bien conocida la dificultad para encontrar casos exactamente solubles de la dinámica de Schrödinger. El problema de movimiento de una partícula cargada en el campo electromagnético de una onda externa no es la excepción. Alguna información se puede obtener por medio de la aproximación de altas frecuencias de Kapitza [1] y Landau [2], en la cual no se toma en cuenta la componente magnética de la radiación, mientras que los efectos principales del campo rápidamente oscilante son descritos por un potencial efectivo, proporcional al promedio temporal del cuadrado de la fuerza eléctrica. No obstante su gran utilidad, esta aproximación no ofrece información en el régimen de grandes intensidades o frecuencias pequeñas.

Un modelo sencillo, útil al describir el movimiento de una partícula cargada en ciertos campos externos, es el de campo magnético rotante [3,4]. Una de las formas de producirlo consiste en considerar que la carga parte de la vecindad de alguno de los puntos nodales (los puntos donde el campo es cero) de una onda estacionaria, cuyo potencial vectorial

$$\vec{A}(\vec{x},t)=-A/2\left[\left[\hat{j}\ \sin\frac{\omega\hat{k}\vec{x}}{c}-\hat{k}\ \sin\frac{\omega\hat{j}\vec{x}}{c}\right]\cos\omega t+\left[\hat{k}\ \sin\frac{\omega\hat{i}\vec{x}}{c}-\hat{i}\ \sin\frac{\omega\hat{k}\vec{x}}{c}\right]\sin\omega t\right], \quad (1)$$

admite la "aproximación de punto nodal"

$$\vec{A}(\vec{x},t)\cong-(A\omega/c)\frac{1}{2}\left[\left[\hat{j}(\hat{k}\vec{x})-\hat{k}(\hat{j}\vec{x})\right]\cos\omega t+\left[\hat{k}(\hat{i}\vec{x})-\hat{i}(\hat{k}\vec{x})\right]\sin\omega t\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{x}\times\vec{B}(t), \quad (2)$$

donde $\vec{B}(t)=B(\hat{i}\cos\omega t+\hat{j}\sin\omega t)$ con $B=A\omega/c$ representa un campo magnético homogéneo, rotando sobre el plano x-y con velocidad angular constante ω alrededor del eje z. Aunque no todos los puntos nodales de (1) poseen la forma aproximada (2), los que la admiten dan lugar a un problema de movimiento matemáticamente muy simple que posee implicaciones físicas interesantes.

La evolución temporal para una partícula cargada no relativista sin spin en el campo generado por (2) se describe por

$$\frac{d}{dt} U(t) = -i\, H(t)\, U(t), \tag{3}$$

en donde $U(t)$ es el operador de evolución tal que $U(0)=1$ y el Hamiltoniano $H(t)$ es de la forma $H(t)=(\vec{p}-(e/c)\vec{A}(\vec{x},t))^2/2m$ (por simplicidad hemos tomado $\hbar=1$). Eliminando la dependencia temporal explícita de $H(t)$ por medio de la sustitución $U(t)=\exp(-i\omega t M_z)W(t)$, en donde $\vec{M}$ representa al operador de momento angular, resulta

$$\frac{d}{dt} W(t) = -i\, G\, W(t), \tag{4}$$

siendo G el generador independiente del tiempo de la forma:

$$G = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{a^2}{2m}\left[y^2 + z^2\right] - \frac{a}{m} M_x + \omega M_z; \quad a=eB/2c. \tag{5}$$

La solución formal a (5) es inmediata $W(t)=\exp(-itG)$. Un modo simple de extraer más información consiste en observar la evolución para las variables canónicas en el esquema de Heisenberg. Seleccionando el 6-vector

$$q=\begin{Vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

definimos $q(t)=W^*(t)qW(t)$. Sabiendo que G genera una transformación lineal $[iG,q]=\Lambda q$ sobre el vector de variables canónicas q, se obtiene

$$\frac{d}{dt} q(t) = [iG, q(t)] = \Lambda\, q(t), \tag{7}$$

en donde Λ es una matriz 6x6 independiente del tiempo de la forma:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega & 0 & 1/m & 0 & 0 \\ \omega & 0 & a/m & 0 & 1/m & 0 \\ 0 & -a/m & 0 & 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & -a^2/m & 0 & \omega & 0 & a/m \\ 0 & 0 & -a^2/m & 0 & -a/m & 0 \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Las trayectorias canónicas (7) se expresan entonces

$$q(t) = e^{t\Lambda}\, q, \tag{9}$$

mientras que, las trayectorias análogas construídas para el operador inicial $U(t)$ (ver (3)), se obtienen aplicando a las (9) una rotación uniforme alrededor del eje z con velocidad angular ω. El carácter global del movimiento depende del tipo algebraico de la matriz Λ, cuyc polinomio característico $D_\Lambda(\lambda)$ es

$$D_\Lambda(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda-\Lambda) = \omega^6\ \Delta(\sigma), \tag{10}$$

en donde $\sigma=\lambda^2/\omega^2$ y $\Delta(\sigma)$ se expresa

$$\Delta(\sigma)= \sigma^3+ 2(1+2\alpha^2)\sigma^2+ (1+3\alpha^2)\sigma + \alpha^2;\ (\alpha=\frac{a}{m\omega}). \tag{11}$$

El discriminante de Cardan de $\Delta(\sigma)$ cambia de signo cuando la constante adimensional $\alpha=eB/(2mc\omega)$ cruza el valor de umbral:

$$\alpha = 0.579982655598... \tag{12}$$

Para α abajo del valor crítico (12), el polinomio $\Delta(\sigma)$ posee tres raíces reales negativas, implicando que $D_\Lambda(\lambda)$ tiene 6 raíces puramente imaginarias y, por lo tanto, la relación (9) define movimientos confinados en el espacio de las variables canónicas q (el régimen de "trampa nodal"). Cuando α aumenta su valor y se aproxima al umbral (12), las trayectorias de Heisenberg, aunque aún confinadas de acuerdo con las predicciones generales de la aproximación de altas frecuencias de Kapitza y Landau, empiezan a salir de los límites concretos que predice esta aproximación. Finalmente, cuando α cruza el valor de umbral ocurre un cambio cualitativo, las trajectorias se transforman abruptamente de atrapadas en desconfinadas (el régimen de "desconfinamiento nodal"), que no podría ser predicho por la aproximación de altas frecuencias. Este régimen podría ser no menos interesante que el régimen de "trampa nodal" para la investigación de la interacción radiación-materia que merecerá, quizá, mayor atención en el futuro [5,6].

[1] P. L. Kapitza, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **21**, 588 (1951).

[2] L. D. Landau and E. M. Lifshiz, Mecánica, Ed. Reverté S. A., Barcelona, México (1965).

[3] B. Mielnik and D. J. Fernández C., "Is There an Instability Transition in Standing Wave Traps?", Lett. Math. Phys. **17,** 87 (1989).

[4] B. Mielnik and D. J. Fernández C., "An Electron Trapped in a Rotating Magnetic Field", J. Math. Phys. **30**, 537 (1989).

[5] D. J. Fernández C., "Semiclassical Resonance in Rotating Magnetic Fields", preprint CINVESTAV (1989).

[6] D. J. Fernández C. and B. Mielnik, "Nodal Resonance in a Strong Standing Wave", preprint CINVESTAV (1989).