XXIII REUNIÓN BIENAL
DE LA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA
DE FÍSICA

LIBRO DE RESÚMENES

TOMO II

VALLADOLID

23-27 SEPTIEMBRE 1991

15. OR-11 MECANICA CUANTICA EN ESPACIO FASE PARA UNA PARTICULA EN UN CAMPO MAGNETICO ROTANTE.

David J. Fernández C.* y Luis M. Nieto.

Departamento de Física Teórica, Universidad de Valladolid,
47011 Valladolid, España.
* En ausencia del Departamento de Física, CINVESTAV IPN,
México.

Resumen. Usando algunos elementos de la teoría de Floquet en conjunción con las técnicas de la mecánica cuántica en espacio fase se resuelve exactamente el movimiento cuántico de una partícula cargada de espin 1/2 en el campo magnético rotante.

Sea una partícula no–relativista de espín 1/2, carga e y masa m, sujeta al siguiente campo magnético:

$$\mathbf{B}(t) = B(\cos\omega t\ \mathbf{i} + \sin\omega t\ \mathbf{j}). \tag{1}$$

La mecánica cuántica en espacio fase asocia funciones definidas sobre este espacio a los estados y las observables del sistema. En este ejemplo tal espacio es $\mathbb{R}^6 \times S^2$, con coordenadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{n}) \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{n})$, en donde $\mathbf{u}$ es un punto del espacio fase clásico $\mathbb{R}^6$ y $\mathbf{n}$ es un vector unitario sobre la esfera S^2 describiendo los grados de libertad del espín. El Hamiltoniano asociado a la partícula es:

$$H(t) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)\right)^2 - \frac{e\hbar}{mc}\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{W}(\mathbf{n}), \tag{2}$$

con $\mathbf{W}(\mathbf{n}) = (\sqrt{3}/2)\mathbf{n}$ y $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{B}(t)\times\mathbf{q}$. El objetivo fundamental de la teoría es encontrar la solución a la ecuación de Schrödinger–Pauli, cuya versión en este formalismo tiene la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Xi(\mathbf{u}, \mathbf{n}; t) = -\frac{i}{\hbar}H(t)\times\Xi(\mathbf{u}, \mathbf{n}; t), \qquad \Xi(\mathbf{u}, \mathbf{n}; 0) = 1. \tag{3}$$

en donde $\Xi(\mathbf{u}, \mathbf{n}; t)$, llamado el propagador de Moyal, es la función en espacio fase que corresponde al operador de evolución de la formulación estandard y el producto no–conmutativo del segundo miembro en (3), representado por el símbolo $\times$ y conocido como el producto torcido, tiene una forma bien conocida [1]. En el caso particular que consideramos aquí, podemos resolver la ecuación de Schrödinger–Pauli usando la teoría de Floquet. La idea básica de esta técnica consiste en tratar de expresar el propagador de Moyal en la siguiente forma:

$$\Xi(\mathbf{u}, \mathbf{n}; t) = \Xi_{\mathcal{O}}(\mathbf{u}, \mathbf{n}; t)\times\Xi_{\mathrm{F}}(\mathbf{u}, \mathbf{n}; t), \tag{4}$$

con $\Xi_{\mathcal{O}}(\mathbf{u}, \mathbf{n}; t)$ una función periódica con el mismo período $T = 2\pi/\omega$ que el Hamiltoniano (2) tal que $\Xi_{\mathcal{O}}(\mathbf{u}, \mathbf{n}; 0) = \Xi_{\mathcal{O}}(\mathbf{u}, \mathbf{n}; T) = 1$ y en donde $\Xi_{\mathrm{F}}(\mathbf{u}, \mathbf{n}; t)$, llamado propagador de Floquet–Moyal, es solución de la ecuación (3) con un Hamiltoniano $H_{\rm F}$ independiente del tiempo. La descomposición (4) no es única, pero en este caso se puede fijar eliminando la dependencia temporal de (3) por medio de la "transición al sistema rotante", que quiere decir escoger para $\Xi_{\mathcal{O}}(\mathbf{u},\mathbf{n};t)$ el propagador que representa a una rotación alrededor del eje z con velocidad angular constante ω [2,3]. Con esta selección, el Hamiltoniano de Floquet independiente del tiempo que determina a $\Xi_{\rm F}(\mathbf{u},\mathbf{n};t)$ es de la forma:

$$H_{\rm F} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{u}^{\rm t}{\rm JF}\mathbf{u} + \hbar(\omega_c W_1 - \omega W_3) \tag{5}$$

en donde F es una matriz 6×6 independiente del tiempo [2,3] y $\omega_c = |e|B/(mc)$. El análisis cuántico del Hamiltoniano de Floquet (5) es sencillo de hacer, ya que $H_{\rm F}$ es cuadrático en las variables orbitales y lineal en las de espín [3–5], permitiendo describir completamente al sistema en términos de un conjunto de funciones cuasiestacionarias, aquellas asociadas a los elementos del soporte ${\rm Sp}(H_{\rm F})$ del proyector espectral $P_{\rm F}(\mathbf{u},\mathbf{n},E) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}} \Xi_{\rm F}(\mathbf{u},\mathbf{n};t)e^{itE/\hbar}\,dt$. Un cálculo explícito nos da el ${\rm Sp}(H_{\rm F})$, que hemos marcado por E pero que no se puede interpretar como la energía:

$$E = \hbar\omega_1(l+\frac{1}{2}) - \hbar\omega_2(m+\frac{1}{2}) + \hbar\omega_3(n+\frac{1}{2}) + s\hbar\omega_0, \tag{6}$$

en donde $l,m,n \in \mathbb{Z}^+$, $s = \pm\frac{1}{2}$, las ω_i's, $i=1,2,3$ se obtienen de las raíces del polinomio característico de F y $\omega_0 = \sqrt{\omega_c^2+\omega^2}$. Esta solución, hasta donde sabemos, es la primera en la que el formalismo en espacio fase de la mecánica cuántica se aplica a un problema que depende explícitamente del tiempo y que involucra tanto a la dependencia orbital como la de espín. Ella podría servir como punto de partida para tratar de aplicar técnicas similares a las aquí mostradas a otras situaciones involucrando Hamiltoniano periódicos en el tiempo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo brindado por la CICYT y la Caja Salamanca de España. Uno de los autores (D.J.F.) agradece también al CONACYT, México por la concesión de una beca postdoctoral.

REFERENCIAS

[1]. L.M. Nieto, J. Phys. A: Math. Gen. **24** (1991), 1579.

[2]. B. Mielnik and D.J. Fernández C., J. Math. Phys. **30** (1989), 537.

[3]. D.J. Fernández C. and L.M. Nieto, "Floquet theory in phase space quantum mechanics for time–dependent quadratic Hamiltonians", en preparación.

[4]. M. Gadella, J.M. Gracia–Bondía, L.M. Nieto and J.C. Várilly, J. Phys. A **22** (1989), 2709.

[5]. D.J. Fernández C. and L.M. Nieto, "Penning trap from the phase space quantum mechanics point of view", a aparecer en Phys. Lett. A.